

Retour en détail sur l'évaluation du cours :

⊕ . 100% de satisfaction!

• quantité d'exemples & animations

• Poly cop.

• Quiz fin de chapitre

animations du cours
dispo sur moodle

Autres :

luminosité des
beaux

⊖ • rythme

• Écriture

• Bruit dans l'auditoire

• quantité d'exercices.

Rappel : $\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y) = l \Leftrightarrow \exists \psi :]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R} \quad f_\theta$

• ψ indépendante de θ

• $\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi(r) = 0$

$a, b \neq 0,$

Méthode :

test des directions

+ critère

✓

test des directions.

+ autre courbe

✗

$\forall \theta \in [0, 2\pi],$

$|f(\tilde{x} + a \cos \theta, \tilde{y} + b r \sin \theta) - l| \leq \psi(r)$

Exemple 3.17 (ii) Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}. \quad \text{Discutons } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

Étape 1: Test des directions.

On a

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^4 \sin^4 \theta}.$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cdot \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta} = 0 \quad \checkmark$$

Étape 2: Critère.

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - 0| = r \cdot \frac{\cos^2 \theta |\sin \theta|}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &\leq 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta \geq \cos^2 \theta$$

$$\leq r \cdot \frac{\cancel{\cos^2 \theta} |\sin \theta|}{\cancel{\cos^2 \theta}} = r \cdot \underbrace{|\sin \theta|}_{\leq 1} \leq r$$

prenant $\varphi(r) = r$, on a le résultat, et

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

⚠ toujours commencer par estimer le dénominateur!

Critère en coordonnées cartésiennes:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^4} \leq \frac{x^2 |y|}{x^2} = |y| := \varphi(y)$$

$\uparrow$
 $x^2 + y^4 \geq x^2$

(iii) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Étape 1: Test des directions

voir exemple 3.7. On obtient 0

Étape 2: Cône.

On a

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - \ell| = \frac{r^3 |\cos\theta| \sin^2\theta}{r^2 \cos^2\theta + r^4 \sin^4\theta}$$

$$= r \frac{|\cos\theta| \cdot \sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2 \sin^4\theta} \leq r \frac{|\cos\theta| \cdot \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= r \cdot |\sin\theta| |\tan\theta|$$

car $|\sin\theta| \cdot |\tan\theta| = +\infty$
 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ impossible à estimer par une constante.

On arrive pas à trouver φ ,

Étape 3 : chercher une courbe.



prendre une courbe de la forme (t^α, t^β)

de telle sorte que dans le dénominateur de $f(t^\alpha, t^\beta)$ on a toujours la même puissance de t .

par exemple ici (t^4, t^2) or (t^2, t)

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

§ 3.4 Techniques avancées pour le calcul de limites

jusqu'à maintenant : polynôme cool pour les
polynôme
estimations car on peut facilement estimer
 r & θ séparément.

problème : comment estimer des expressions du style

$$\frac{1 - \cos(r \cos \theta)}{r |\cos \theta| + r^2 \sin^2 \theta}$$

→ DL!

Proposition 3.18 (DL & estimations)

Soit $h \geq 0$, $f \in C^{h+1}(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On note

$$P_h(x) = \sum_{j=0}^h \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j, \quad \text{le polynôme de}$$

Taylor d'ordre h de f autour de x_0

Alors, $\exists \delta > 0$, et $C > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$|f(x) - P_h(x)| \leq C |x - x_0|^{h+1}$$

$$\rightarrow |\sin(x)| \leq C|x|$$

$$|\sin(x) - x| \leq C|x|^3$$

$$|e^x - 1| \leq C|x|$$

$$|e^x - 1 - x| \leq C|x|^2$$

$$\vdots$$
$$|\log(1+x) - x| \leq C|x|^2$$

Exemple 3.19 :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 + y^2}$

Discutons $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

Étape 1 : Test des directions

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(r^2 \cos^2 \theta)}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(r^2 \cos^2 \theta)}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.H.} \quad &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r^2 \cos^2 \theta) \cdot \cancel{2r} \cos^2 \theta}{\cancel{2r}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sin(r^2 \cos^2 \theta) \cdot \cos^2 \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Étape 2: Critère.

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - \ell| = \frac{|1 - \cos(r^2\cos^2\theta)|}{r^2}$$

Prop. $|1 - \cos(u)| \leq C|u|^2$

$\cos(u) = 1 + o(|u|)$

$u \mapsto \cos(u)$

strükt

Chizot / Friedli

$$\leq \frac{C|r^2\cos^2\theta|^2}{r^2} = C \cdot r^2 \cdot \underbrace{|\cos^4\theta|}_{\leq 1} \leq C \cdot r^2$$

$\psi(r) = C \cdot r^2$ fait marcher le critère.

⚠ utiliser le DL de fonction $\left[\begin{array}{l} \text{sans } \theta \\ \text{sans } \theta \end{array} \right]$ sans θ qui apparaît.
i.e. ne pas faire $|1 - \cos(u \cdot \cos^2\theta)| \leq C|u|^2$

Proposition 3.21 / Remarque 3.22

" Si dans le test des directions, on utilise B.H.
On peut aussi vérifier le critère sur
l'expression qu'on obtient après avoir fait
B.H., //

Exemple 3.23

Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 + \log(1+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

Étape 1: test des directrices

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \cos^2 \theta + \log(1 + r^2 \sin^2 \theta)}{r}$$

B.H. $\lim_{r \rightarrow 0^+} 2r \cos^2 \theta + \frac{2r \sin^2 \theta}{1 + r^2 \sin^2 \theta}$

$$1 + r^2 \sin^2 \theta \geq 1 \quad (r^2 \sin^2 \theta \geq 0)$$

$$= 0$$

$$1 + r^2 \sin^2 \theta \geq r^2 \sin^2 \theta \quad (1 \geq 0)$$

Étape 2: encadrement

$$2r \cdot \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{1 + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{2}{r}$$

$$\left| 2r \cos^2 \theta + \frac{2r \sin^2 \theta}{1 + r^2 \sin^2 \theta} - 0 \right|$$

$$\leq 2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta \frac{1}{1 + r^2 \sin^2 \theta} \leq 2r$$

$\Rightarrow \varphi(r) = 2r$ fait l'affaire, et par la proposition

3.21, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$

Chapitre 4 : Fonctions continues, dérivées partielles & fonctions différentiables

§4.1 Fonctions continues

Définition 4.1 : Fonction continue.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$.

(i) Si $\tilde{x} \in D$ et f est définie au vge de $\tilde{x}$,
on dit que f est continue en $\tilde{x}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in B(\tilde{x}, \delta) \quad \|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{tq } \|x - \tilde{x}\| < \delta \\ \text{et } \|f(x) - f(\tilde{x})\| < \varepsilon \end{array} \right.$$

(ii) Si D est ouvert, on dit que f est continue
si $\forall \tilde{x} \in D$, f est continue en $\tilde{x}$. On note
 $f \in C^0(D; \mathbb{R}^m)$